203.

Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples et applications.

I Fonctions régulières.

1. Approximation locale

Théorème 1 (Taylor-Young) : Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, et $f : I \to \mathbb{R}$, $n-1$ fois dérivable au voisinage $a \in I$, et telle que $f^{(n)}(a)$ existe. Alors pour tout $h > 0$, tel que

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o(h^n).$$

Application 2 : La fonction $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ se prolonge par continuité en 0.

Théorème 3 (Taylor-Lagrange) : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, de classe C^n, telle que $f^{(n+1)}$ existe sur $]a,b[$. Alors il existe $\xi \in]a,b[$, tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(b-a)^n$$

Application 4 : Le schéma d'Euler explicite pour une équation différentielle ordinaire est consistant d'ordre 1.

Théorème 5 (Reste intégral) : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, de classe C^{n+1}. Alors :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

Application 6 : Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, C^∞ (où $I \subset \mathbb{R}$), est développable en série entière en 0 si et seulement si $f(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, converge simplement vers 0, pour tout $|x| < \alpha$, avec $\alpha > 0$.

2. Uniforme sur un compact.

Théorème 7 (Weierstrass) : Toute fonction continue sur un intervalle compact de $\mathbb{R}$, est limite uniforme de polynômes algébriques.

Application 8 : Une fonction continue sur $[0,1]$, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 x^n g(x)\,dx = 0$, est identiquement nulle.

Application 9 : (Théorème de Müntz) : Soit $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{*\mathbb{N}}$ strictement croissante. Alors $\mathrm{Vect}(x^{\alpha_n})_{n \in \mathbb{N}}$ est dense dans $C([0,1], \|\cdot\|_2)$, si et seulement si $\sum_{n \geq 0} \alpha_n^{-1}$ diverge.

II. Fonctions intégrables.

1. Convolution :

Définition 10 : Soient f et g deux fonctions mesurables sur $\mathbb{R}$. On définit la convolée $f * g$ par (formellement) :

$$f*g(x) = \int f(x-t)\,g(t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Théorème 11 (Existences) :

1. si $(f,g) \in L^p(\mathbb{R}) \times L^1(\mathbb{R})$, $f*g \in L^1(\mathbb{R})$, $f*g = g*f$, et $\|f*g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$. (où $1 \leq p < +\infty$)
2. Si $f \in L^\infty(\mathbb{R})$, $g \in L^1(\mathbb{R})$, alors $f*g \in L^\infty$.
3. Si f est localement intégrable, et $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ à support compact. Alors $f*g$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Proposition 12 : Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, alors le support de $f*g$ est inclus dans $\mathrm{supp}(f) + \mathrm{supp}(g)$. En particulier, si f et g sont à support compact, $f*g$ l'est aussi.

Théorème 13 : Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in C_c^k$ ($k \in \mathbb{N}$). Alors $f*g \in C^k(\mathbb{R})$ et $(f*g)^{(k)} = (f * g^{(k)})$

Application 14 : Soit $K \subset \mathbb{R}$ compact et Ω voisinage ouvert de K. Alors il existe $\theta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\theta = 1$ sur K, $\theta = 0$ dans Ω^c, et $0 \leq \theta \leq 1$ sur $\mathbb{R}$.

2. Régularisation.

Définition 15 : Une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $L^1(\mathbb{R})$ est une approximation de l'unité si elle vérifie :

a) $\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x)\,dx = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) pour tout $\alpha > 0$, $\lim_{n \to +\infty} \int_{|x| \geq \alpha} \varphi_n(x)\,dx = 0$.

c) $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est uniformément bornée dans $L^1(\mathbb{R})$.

Exemple 16 : La fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times n \times e^{-(nx)^2}$ est une approximation de l'unité.

Remarque 17 : On peut aussi considérer des familles de fonctions $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, où l'on fait tendre $\varepsilon \to 0$ pour se ramener aux propriétés de la définition 15.

Définition 18 : Une approximation de l'unité $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée suite régularisante si pour tout $n \in \mathbb{N}$ φ_n est $C_c^\infty(\mathbb{R})$.

Exemple 19 : Soit $\alpha \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$\varphi_n(x) = n \frac{\alpha(nx)}{\|\alpha\|_{L^1}}$ est une suite régularisante.

Théorème 20 : L'ensemble des fonctions étagées intégrables, et l'ensemble $C_c^0(\mathbb{R})$ sont denses dans tout les $L^p(\mathbb{R})$, où $1 \leq p < +\infty$.

Théorème 21 : (Continuité des translations). Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$ $p \in [1, +\infty[$, $a \in \mathbb{R}$. L'opérateur $\tau_a : f \to f(\cdot + a)$ est continue dans $L^p(\mathbb{R})$, autrement dit :
$$\|\tau_a f - f\|_p \xrightarrow[a\to 0]{} 0.$$

Théorème 22 : (Régularisation) : Soit $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une suite régularisante, $1 \leq p < +\infty$.
1) Si $f \in L^p(\mathbb{R})$ alors $\|\rho_\varepsilon * f - f\|_p \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$
2) Si $f \in C_c^0(\mathbb{R})$, alors $\|\rho_\varepsilon * f - f\|_\infty \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$

Exemple 23 : En posant $\varphi_n(t) = \begin{cases} \frac{a_n(t)}{\|a_n\|_{L^1([-1,1])}} & \text{si } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
avec $a_n(t) = (1-t^2)^n$.
et d'après le 2) du théorème 22, on retrouve le théorème de Weierstrass.

3. Application à la densité.

Théorème 24 : 1) $C_c^k(\mathbb{R})$ est dense dans $C^k(\mathbb{R})$, pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts, pour $k \in \mathbb{N}$.
2) $C_c^\infty(\mathbb{R})$ est $\|\cdot\|_\infty$-dense dans C^k, $k \in \mathbb{N}$.
3) $C_c^\infty(\mathbb{R})$ est $\|\cdot\|_p$-dense dans $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < +\infty$ DVLPT

Application 25 : (Riemann-Lebesgue) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors
$$\lim_{x\to\pm\infty} |\hat{f}(x)| = \left|\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-itx} dt\right| = 0$$

Application 26 : Soit $f \in H^1(]a,b[)$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, et soit $g \in L^2(]a,b[)$ sa dérivée au sens des distributions. Alors $g = f'$.

4. Application : le théorème de Plancherel.

Définition 27 : On appelle espace de Schwarz l'ensemble :
$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \left\{ f \in C^\infty \mid \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N},\ \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^\alpha f^{(\beta)}(x)| < +\infty \right\}.$$

Proposition 28 : • $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$, pour $\|\cdot\|_2$.
• $L^2(\mathbb{R})$ est complet pour $\|\cdot\|_2$

Définition 29 : Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On définit sa transformée de Fourier par :
$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-itx} dt, \quad x \in \mathbb{R},$$
et on pose $\mathcal{F} : f \to \hat{f}$.

Théorème 30 : $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est stable par $\mathcal{F}$.

Théorème 31 : $\mathcal{F}$ est une isométrie de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ qui se prolonge de manière unique en une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$. En particulier : $2\pi\|f\|_2^2 = \|\hat{f}\|_2^2$, pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$ DVLPT

(**Application 32**) : Considérons le problème (P) : $y'' - y = f$.
Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, (P) admet une unique solution dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, et si $f \in L^2(\mathbb{R})$, une unique solution faible.

III. Fonctions périodiques.

Noyaux trigonométriques

Dorénavant L^p désignera l'espace des classes de fonctions 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$, intégrables pour la norme : $\|f\|_p = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt$ $(1 \leq p < +\infty)$, on notera $L^p := L^p(\mathbb{T})$, où $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Définition 33 : 1. Pour tout $m \in \mathbb{Z}$, on note $c_m(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-imt} dt$ pour $f \in L^1$, et $e_m : t \mapsto e^{imt}$. $c_m(f)$ est appelé coefficients de Fourier de f.

2. Pour $N \in \mathbb{N}$, on appelle série de Fourier de f : $(S_N(f)) = \left(\sum_{m=-N}^{N} c_m(f) e_m\right)_{N \in \mathbb{N}}$, et on note $S(f)$ sa limite (sous réserve d'existence).

Définition 34 (Noyaux) : Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on définit :

1. $D_N = \sum_{m=-N}^{N} e_m$, noyaux de Dirichlet d'ordre N.
2. $K_N = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} D_m$, noyau de Fejér d'ordre N $(N \neq 0)$.

Proposition 35 : $(K_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ est une approximation de l'unité sur $\mathbb{T}$.

Théorème 36 : 1. Si $f \in C^0(\mathbb{T})$, alors $\|f * K_N\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ et on a : $\|f * K_N - f\|_\infty \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$

2. Si $f \in L^p$ $(1 \leq p < \infty)$, alors $\|f * K_N\|_p \leq \|f\|_p$ et on a : $\|f * K_N - f\|_p \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$.

Remarque 37 : Ce théorème est à rapprocher du théorème 22.

Application 38 : (Weierstrass) Le théorème précédent (1.) est une version "trigonométrique" du théorème de Weierstrass.

Application 39 : 1. $(e_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormale de L^2. En particulier, si $f \in L^2$, alors : $\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_m(f)|^2 = \|f\|_2^2$, et $\|S_N(f) - f\|_2 \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$

2. Si $f \in C^0(\mathbb{T}) \cap C^1_M(\mathbb{T})$ (C^1 par morceaux), alors $(S_N(f))_N$ converge normalement vers f, et $S(f) = f$.

3. Si $f, g \in C^0(\mathbb{T})$, et $c_m(f) = c_m(g)$ $\forall m \in \mathbb{Z}$, alors $f = g$. De même, si $f, g \in L^1$, et $c_m(f) = c_m(g)$ $\forall m \in \mathbb{Z}$, alors $f = g$ pp.

Théorème 40 : (Dirichlet) Si $f \in C^1_M(\mathbb{T})$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$S_N(f)(x) \xrightarrow[N \to +\infty]{} \frac{1}{2}\left(f(x^-) + f(x^+)\right)$$

Application 41 : Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$, telle que $f = \mathbb{1}_{[0,\pi]} - \mathbb{1}_{[-\pi,0]}$ sur $[-\pi, \pi]$. On calcule alors $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$ et $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}$.

Application 42 : (Formule sommatoire de Poisson) : Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R})$, telle que :

1. $\exists M > 0, \exists \alpha > 1, \forall x \in \mathbb{R} : (1+|x|)^\alpha |f(x)| \leq M$
2. $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(m)|$ converge, (où $\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2i\pi t x} dt$).

Alors :

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} f(m) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(m).$$

Développements
- Théorème 31 (Plancherel)
- Théorème 24. 3) ⊕ 22. 1).

Bibliographie :
- "Analyse". X. Gourdon.
- "Analyse pour l'agrégation". Zuilly. Queffélec.
- "Théorie de l'intégration". Briane Pagès.
- "Intégration". T. Gourdon.
- "131 développements". Lesesvre.